工作汇报

孙沁璇

2015.11.8

原方案设想

- 一、将每一个点看作一个局部平面（这个在计算点云法向量时都已得到），并将其法向量转换到球坐标系下。
- 二、用Parzen窗口拟合其分布，选择高斯核函数。
- 三、匹配时，求变换t使目标函数最大化。

$$J(\mathbf{t})=\sum_{i=1}^{N^2}\hat{p}\left(\mathbf{x}_i^1\right)=\frac{1}{N^1}\sum_{i=1}^{N^2}\sum_{t=1}^{N^1}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}_t\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_t\right)^T\boldsymbol{\Sigma}_t^{-1}\left(\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_t\right)\right]$$

其中 $\mathbf{x}_i=(\theta,\varphi,d)$ ——平面参数

$\mathbf{t}=\left(\alpha,\beta,\gamma,t_x,t_y,t_z\right)$ ——待求解变换

$\mathbf{x}_i^1=T\left(\mathbf{x}_i^2,\mathbf{t}\right)$

原方案设想

- 两帧之间平面参数 $\mathbf{x}_i = (\theta, \varphi, d)$ 的转换关系如下：

$$\theta^1 = \arccos\left(n_z^1\right) = \arccos\left(r_{31}\sin\theta^2\cos\varphi^2 + r_{32}\sin\theta^2\sin\varphi^2 + r_{33}\cos\theta^2\right)$$

$$\varphi^1 = \arctan\left(\frac{n_y^1}{n_x^1}\right) = \arctan\left(\frac{r_{21}\sin\theta^2\cos\varphi^2 + r_{22}\sin\theta^2\sin\varphi^2 + r_{23}\cos\theta^2}{r_{11}\sin\theta^2\cos\varphi^2 + r_{12}\sin\theta^2\sin\varphi^2 + r_{13}\cos\theta^2}\right)$$

$$d^1 = d^2 + \begin{bmatrix}\sin\theta^2\cos\varphi^2 & \sin\theta^2\sin\varphi^2 & \cos\theta^2\end{bmatrix} \cdot R^T \cdot \begin{bmatrix} t_x \\ t_y \\ t_z \end{bmatrix}$$

原方案设想的可行性分析

- 需要解决的一个问题：
  - 目标函数中 $\mathbf{\Sigma}_t$ 的确定。

$$J(\mathbf{t})=\sum_{i=1}^{N^2}\hat{p}\left(\mathbf{x}_i^1\right)=\frac{1}{N^1}\sum_{i=1}^{N^2}\sum_{t=1}^{N^1}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\boxed{\left|\mathbf{\Sigma}_t\right|}^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_t\right)^T\boxed{\mathbf{\Sigma}_t^{-1}}\left(\mathbf{x}_i^1-\mathbf{x}_t\right)\right]$$

  - $\mathbf{\Sigma}_t$ 的意义：变量 $\mathbf{x}_i=(\theta,\varphi,d)$ 在空间的分布情况，且该分布是未知的。
  - 思路一：在 (θ,φ,d) 空间，假设其服从正态分布，用最大似然估计来确定其分布的参数，类似用局部点集进行平面拟合的过程。
  - 思路二：在平面拟合的过程中确定平面参数的不确定度。

原方案设想的可行性分析

- 关于思路一：在 (θ, φ, d) 空间对其分布进行拟合。
  - 距离度量的问题。目标函数中协方差的确定本质上也是解决该空间中距离度量的问题，所以在该空间进行搜索时，只能将各个维度进行尺度均衡化后用欧式距离来求解，但和点坐标不同的是，该空间中各维度所代表的物理意义不同，不知这样进行距离度量能否得到好的结果。
  - 还有近邻搜索的问题。就算是用欧式距离进行度量，由于不同于Kinect点云可以从图像上直接进行索引，也是要耗费一定计算量。

原方案设想的可行性分析

- 关于思路二：在平面拟合的过程中确定平面参数的不确定度。
  - 对此问题进行了一些调研。
  - 主要参考文献：
  - [1] K. Pathak, N. Vaskevicius, and A. Birk, Revisiting Uncertainty Analysis for Optimum Planes Extracted from 3D Range Sensor Point-Clouds, International Conference on Robotics and Automation, ICRA, IEEE Press, 2009.

平面数据不确定度的确定（参考文献中[1]）

- 平面表示为 $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = d$
- 激光点云中的点表示为极坐标形式 $\mathbf{r}_j = \rho_j \hat{\mathbf{m}}_j,\ j = 1 \dots N$
- 点云中的点服从正态分布 $\mathcal{N}\{\bar{\rho}_i, \sigma^2\{\bar{\rho}_i, \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_i\}\}$ ，其中 $\bar{\rho}_i = d/(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_i)$
- 其对数似然函数可以表示为

$$\max_{\hat{\mathbf{n}},d} \mathcal{L}_{\mathrm{GMLP}} = -\beta \sum_{i=1}^{N} \log \sigma\{\bar{\rho}_i, \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_i\} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{(\rho_j(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_j) - d)^2}{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_j)^2 \sigma^2\{\bar{\rho}_j, \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{m}}_j\}}$$

- 通过激光点云的误差模型以及一定必要的假设，其似然函数可以化简成如下形式：

$$\max_{\hat{\mathbf{n}},d} \mathcal{L}_{\mathrm{ALSP}} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} \frac{(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}_j - d)^2}{\hat{\sigma}_j^2}$$

平面数据不确定度的确定（参考文献中[1]）

- 化简成以上形式后便可以求得平面参数n和d的封闭解形式。

$$d_\star = \hat{\mathbf{n}}_\star \cdot \mathbf{r}_G, \qquad \mathbf{r}_G \triangleq \left(\sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^{-2}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{N} (\hat{\sigma}_j^{-2} \mathbf{r}_j)$$

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}_\star &= \arg\min_{\|\hat{\mathbf{n}}\|=1} \hat{\mathbf{n}}^T \left(\sum_{j=1}^{N} \hat{\sigma}_j^{-2} (\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_G)(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_G)^T\right) \hat{\mathbf{n}} \\ &\triangleq \arg\min_{\|\hat{\mathbf{n}}\|=1} \hat{\mathbf{n}}^T \mathbf{S} \hat{\mathbf{n}},\end{aligned}$$

（这种形式的最小化问题存在封闭解法）

平面数据不确定度的确定（参考文献中[1]）

- 得到平面参数n和d后，求似然函数的Hessian矩阵

$$\mathbf{H}_{\mathrm{ALSP}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \hat{\mathbf{n}}^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial d \partial \hat{\mathbf{n}}} \\ (\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial d \partial \hat{\mathbf{n}}})^{\mathrm{T}} & \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial d^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{nn} & \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{n}}d} \\ \mathbf{H}_{\hat{\mathbf{n}}d}^T & \mathbf{H}_{dd} \end{bmatrix}_{\mathrm{ALSP}}$$

- 最后得到平面参数的协方差矩阵

$$\mathbf{C}_{\mathrm{ALSP}} = -\mathbf{H}_{\mathrm{ALSP}}^{+}.$$

原方案设想的可行性分析

- 基于以上参考文献中的方法，我结合Kinect数据特点尝试做了推导，发现形式太复杂，没有办法得到封闭解的形式，只能用迭代的方法。
- 但这一过程是针对点云中的每一个点来进行的，所以感觉用迭代方法来求解不太现实。
- 而且文献中即使用激光点云数据特点对形式做了一定的简化，但在求解过程中还是存在进一步简化的成分，比如似然函数对法向量n求导时忽略了公式中的两项，才得到了上面所说的有封闭解形式的目标函数。（为何忽略以及有何影响文中也没有提到）

对原方案的一些调整思路

- 因为原方案中平面参数在(θ,φ,d) 空间的分布问题导致整个流程都很不顺，所以深入考虑了一下整个方案的核心，以及之前为何要选择(θ,φ,d)来做为平面参数。
- 核心：拟合参考帧中的数据分布，并将第二帧中的数据往参考帧中进行投影，计算投影位置处的概率，优化目标是使其概率最大化。
- 为何选择(θ,φ,d) ：要用非参数分布中Parzen窗口的方法来拟合，而这三个参数的变化范围都是很容易确定的，所以在选择窗口大小的时候会比较方便。

对原方案的一些调整思路

- 而局部平面拟合的过程本质上是对局部点云进行正态分布拟合的过程（取其协方差矩阵最小特征值对应特征向量的方法作为法向量即得到局部平面）。
- 也就是说，在得到局部平面信息时，也就相当于得到了局部点云的分布信息，而这个分布是在(x,y,z)空间中。
- 即可以把目标函数中的 $\mathbf{x}_i$ 由 (θ,φ,d) 改为(x,y,z)，$\mathbf{\Sigma}_t$ 用局部平面拟合时得到的协方差矩阵。
- 这样一来其实也包含了拟合的局部平面的信息（因为有分布信息），但数据分布空间由平面参数回归到点坐标。

对原方案的一些调整思路

- 即优化目标调整为

$$J(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{N^1}\sum_{j=1}^{N^2}\sum_{i=1}^{N^1}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}_i\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left({}^2\mathbf{p}_j^{'} - {}^1\mathbf{p}_i\right)^T \boldsymbol{\Sigma}_i^{-1}\left({}^2\mathbf{p}_j^{'} - {}^1\mathbf{p}_i\right)\right]$$

- 其中 $\mathbf{p}_i = (x, y, z)$

$$\boldsymbol{\theta} = \left(\alpha, \beta, \gamma, t_x, t_y, t_z\right)$$

$${}^2\mathbf{x}_j^{'} = T\left({}^2\mathbf{x}_j, \boldsymbol{\theta}\right)$$

Σ_i 局部平面拟合时得到的协方差矩阵

与平面匹配的结合

- 一、匹配平面大于或等于三对
- 二、匹配平面为两对
- 三、匹配平面为一对

匹配平面大于或等于三对

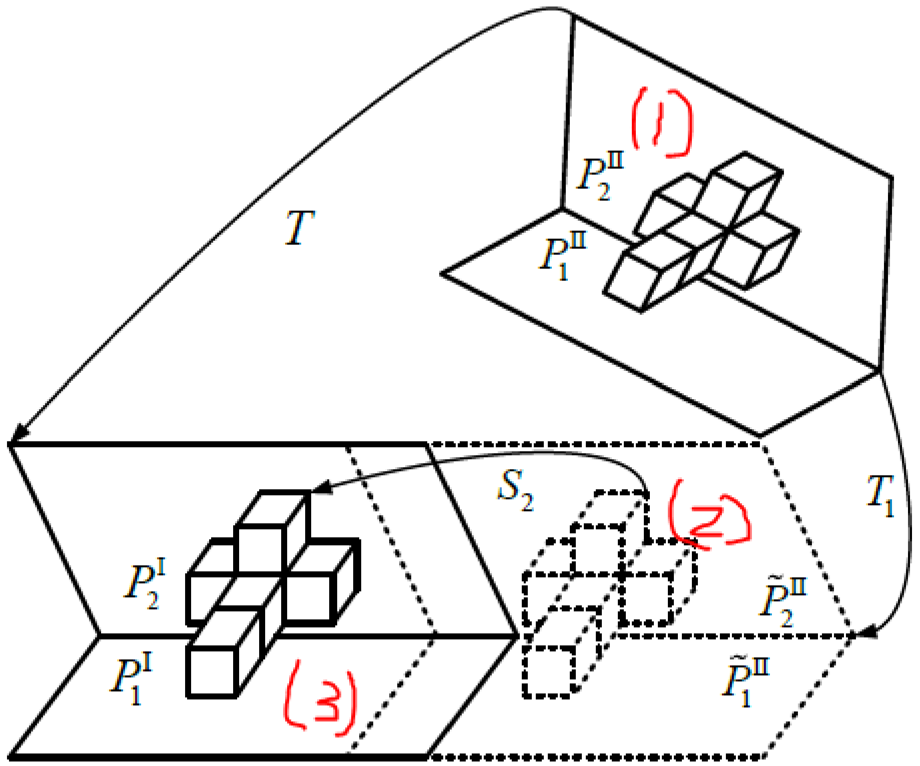
- 当匹配平面大于或等于三对时，可以通过匹配平面的参数直接求解两帧变换（不用迭代）。
- 将用平面求解得到的变换作为迭代初值。
- 优化目标为： $J'(\boldsymbol{\theta}) = J(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{R}\cdot {}^{2}\mathbf{n}_i - {}^{1}\mathbf{n}_i\right)^T\left(\mathbf{R}\cdot {}^{2}\mathbf{n}_i - {}^{1}\mathbf{n}_i\right) + \sum_{i=1}^{N}\left(\mathbf{R}\cdot {}^{2}\mathbf{n}_i\right)^T\cdot\mathbf{t}$
- 其中 $J(\boldsymbol{\theta})$ 中所用到的点集可以通过匹配平面来进行一些筛选，不需要一帧点云中全部的点参与运算。

匹配平面为两对

- 可求解变换 $\mathbf{R}, \mathbf{t}_1$ 使其从位置(1) 到位置(2)
- 待求解变换 $\mathbf{t}_2$ 使其从位置(2)到位置(3)
- 注意到 $\mathbf{t}_2$ 其实是一个一维变换
- 令 $\mathbf{u} = {}^1\mathbf{n}_1 \times {}^1\mathbf{n}_2$

  $\mathbf{v} = {}^1\mathbf{n}_1$

  $\mathbf{w} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$
- 将参与优化的点集全部投影到 $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ 所张成的空间中，则待求的平移变换$\mathbf{t}_2$ 只在 $\mathbf{u}$ 轴上投影为 t_2，另外两个轴的投影都为零。



匹配平面为两对

- 设投影变换 $\mathbf{H}=\begin{bmatrix}\mathbf{u} & \mathbf{v} & \mathbf{w}\end{bmatrix}^T, \mathbf{C}_i=\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_i\mathbf{H}^t$
- 优化目标为：$J(\boldsymbol{\theta})=-\frac{1}{N^1}\sum_{j=1}^{N^2}\sum_{i=1}^{N^1}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}\left|\boldsymbol{\Sigma}_i\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)^T\mathbf{C}_i^{-1}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)\right]$
- 取其中一项 $s(i,j)=-\frac{1}{\left|\boldsymbol{\Sigma}_i\right|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)^T\mathbf{C}_i^{-1}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)\right]$
- 令 $\mathbf{q}(i,j)=\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}_j^{'}-{}^1\mathbf{p}_i\right)$
- 则梯度为 $\frac{\partial s(i,j)}{\partial t_2}=\frac{\partial s(i,j)}{\partial\mathbf{q}(i,j)}^T\frac{\partial\mathbf{q}(i,j)}{\partial t_2}$
- 其中，$\mathbf{q}(i,j)$ 只有一维是与 t_2 有关，其他两维求导结果都为零。

匹配平面为两对

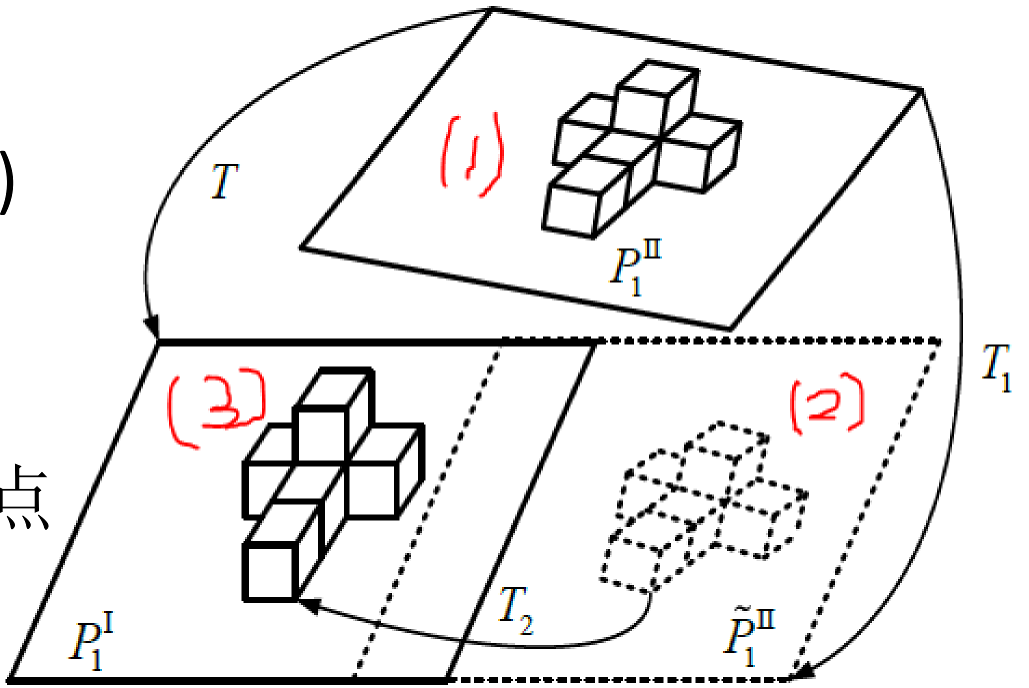
- PS：
- 由于匹配平面为两对时，经过投影变换只剩下一个变量，所以曾尝试能否求出封闭形式的解。
- 经过推导，最后的目标函数形式变为指数和一次多项式相乘再求和的结果，无法直接求解。
- 但如果目标函数的求和运算变为乘积运算，再取对数，则可以直接求封闭解。但若变为乘积运算，理论上有些说不通。
- 所以最终还是采用迭代的方式来求解，同时通过平面匹配的结果对目标函数进行简化。

匹配平面为一对

- 可求解变换$\mathbf{R}_1,\mathbf{t}_1$使其从位置(1) 到位置(2)
- 待求解变换$\mathbf{R}_2,\mathbf{t}_2$使其从位置(2)到位置(3)
- $\mathbf{R}_2,\mathbf{t}_2$ 是一个二维平面上的变换
- 令 $\mathbf{u} = {}^1\mathbf{p} - {}^1\mathbf{p}_0$ 其中 ${}^1\mathbf{p},{}^1\mathbf{p}_0$ 是平面上任两点

  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \times {}^1\mathbf{n}_1$

  $\mathbf{w} = {}^1\mathbf{n}_1$
- 将参与优化的点集全部投影到 $\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}$ 所张成的空间中，则待求的平移变换$\mathbf{R}_2,\mathbf{t}_2$只在 $\mathbf{u},\mathbf{v}$轴所在平面上的旋转和平移变换，设其为 $\mathbf{x} = (\varphi, u_2, v_2)$



匹配平面为一对

- 设投影变换 $\mathbf{H}=[\mathbf{u} \quad \mathbf{v} \quad \mathbf{w}]^T, \mathbf{C}_i=\mathbf{H}\boldsymbol{\Sigma}_i\mathbf{H}^t$
- 优化目标为：$J(\boldsymbol{\theta})=-\frac{1}{N^1}\sum_{j=1}^{N^2}\sum_{i=1}^{N^1}\frac{1}{(2\pi)^{d/2}|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}'_j-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)^T\mathbf{C}_i^{-1}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}'_j-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)\right]$
- 取其中一项 $s(i,j)=-\frac{1}{|\boldsymbol{\Sigma}_i|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}'_j-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)^T\mathbf{C}_i^{-1}\left(\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}'_j-{}^1\mathbf{p}_i\right)\right)\right]$
- 令 $\mathbf{q}(i,j)=\mathbf{H}\cdot\left({}^2\mathbf{p}'_j-{}^1\mathbf{p}_i\right)$
- 则梯度为 $\frac{\partial s(i,j)}{\partial \mathbf{x}_k}=\frac{\partial s(i,j)}{\partial \mathbf{q}(i,j)}^T\frac{\partial \mathbf{q}(i,j)}{\partial \mathbf{x}_k}$ 其中 $\mathbf{x}_k$ 是 $\mathbf{x}=(\varphi,u_2,v_2)$ 第k维